実用的な座屈強度評価について

－組み合わせ応力下におけるパネルの座屈強度、塑性修正法の検討－

技術研究所　原田 実

1.はじめに

船体構造は、板部材や桁部材が防撓材で補強された複雑な連続防撓パネル構造となっており、このため座屈強度を評価する上で、防撓材で仕切られた無数にあるパネルをいかに効率よくかつ精度よく評価できるかが重要となる。

一般に、パネルの座屈応力は、FEM による固有値解析により精度よく求めることが可能である。しかしながら、膨大な量のパネルに対して FEM による固有値解析を実施することは現実的ではなく、通常は船級協会などが提案している座屈強度評価のための簡易算式を用いている。これらの簡易算式では、様々な仮定が設けられており、最も安全側の評価結果を与えるように設定されている。例えば、パネルの周辺を単純支持と仮定すれば、防撓パネルの座屈強度より安全側の評価となる。

表題の研究においては、これらの仮定を可能な限り取り除き、より現実に近い合理的な座屈評価が行えることを目指した。そのため、座屈強度評価における広範囲な研究を実施し、その研究成果を基に、より合理的な座屈強度評価のための簡易算式の開発を目指している。ここでは、得られた研究成果の中で、組み合わせ応力下におけるパネルの座屈強度、塑性修正法の検討について簡単に紹介する。

2.組み合わせ応力下におけるパネルの座屈強度

面内 5 成分の組み合わせ応力下における座屈の相関式を開発している。開発された相関式の概要を付録に示す。相関式の開発にあたっては、様々な座屈応力比(=作用応力／座屈応力)で FEM による固有値解析を行なっており、その固有値解に合うように相関式は算定されている。ここでは、膨大な量の固有値計算の結果から、複雑な組み合わせ応力下におけるパネルの座屈強度やその座屈モードの特徴について紹介する。

2.1 二軸圧縮とせん断及び短辺方向の曲げ応力下におけるパネルの座屈強度

図 1 に示す面内 5 成分の組み合わせ応力の中で、σx、σy、τ及びσby が同時に作用する場合の座屈強度について検討した。ここで、固有値計算に用いたパネルの寸法は、短辺の長さを 1000mm に固定して、長辺の長さはそれにアスペクト比を乗じた長さとした。パネル板厚は 10mm で、パネルの境界は周辺単純支持である。固有値計算におけるパネルの要素分割数は 1000mm に対して 12 分割とした。

アスペクト比 3 のパネルに対し、2 軸圧縮と短辺方向の曲げ応力の組み合わせ及びこれにせん断応力を加えた固有値解析の計算結果を図 2(a)、(b)に示す。また、図 2(a)の場合の固有値解における代表的な座屈モードを図 3(a)、(b)、(c)に示す。図 2 は横軸が長辺方向の圧縮座屈応力比(σx/σcrx)、縦軸が短辺方向の圧縮座屈応力比(σy/σcry)を表し、短辺方向の曲げ座屈応力比(by=σby/σcrby)を 0 から 0.6 まで考慮した。

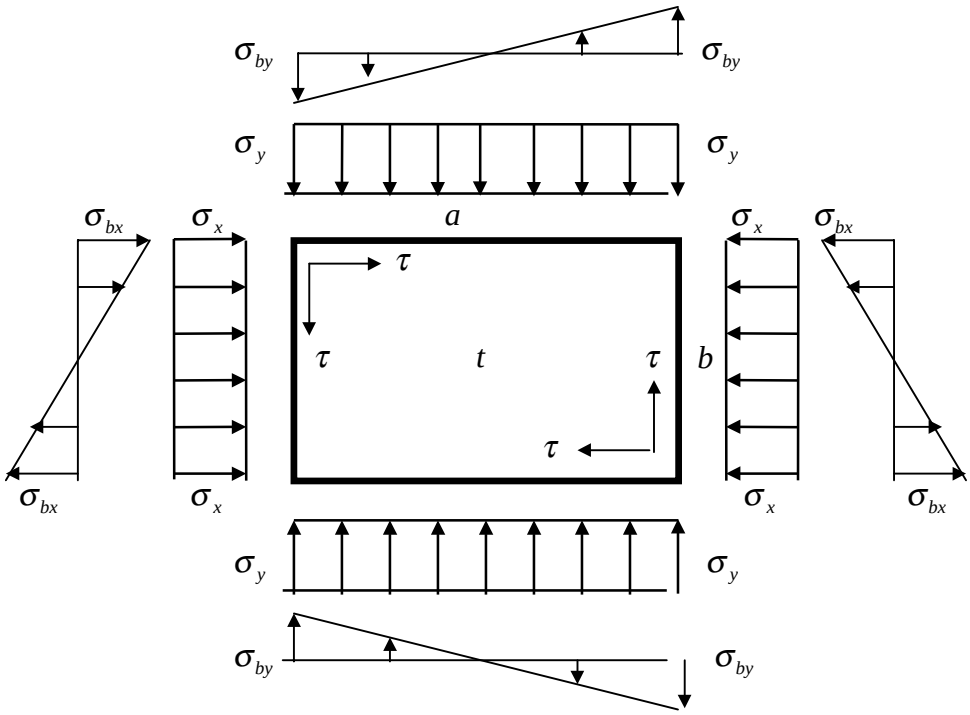
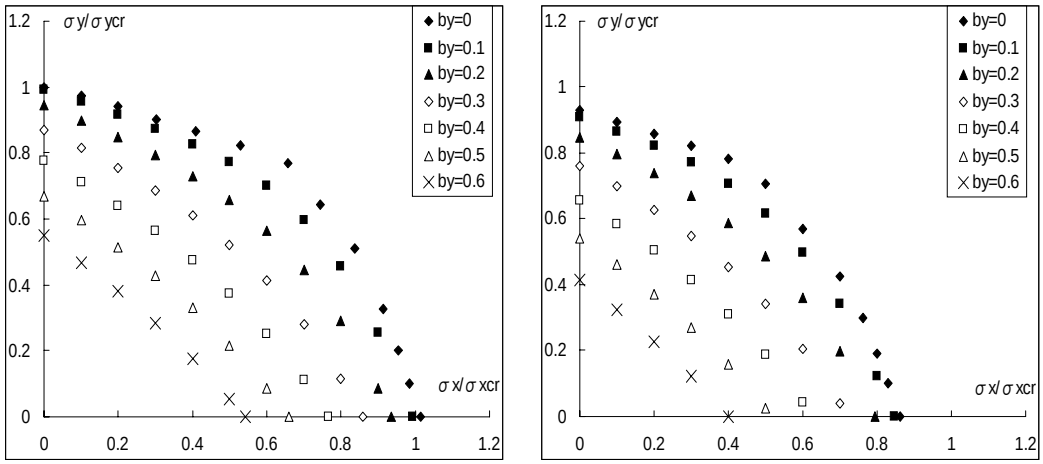


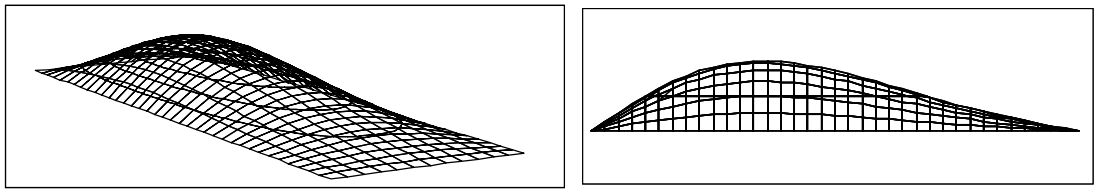
図 1　面内 5 成分の組み合わせ応力



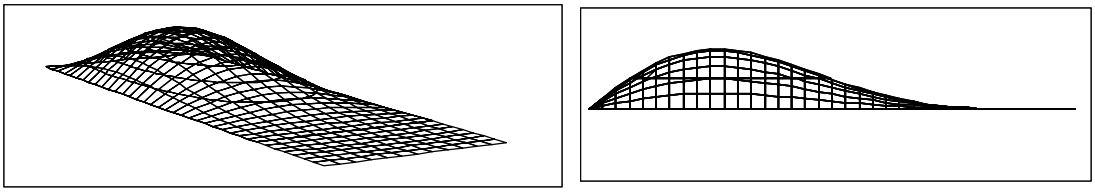
(a) τ / τ cr=0　　(b) τ / τ cr=0.4

図 2　2 軸圧縮とせん断及び短辺方向の曲げ応力下における FEM 固有値解

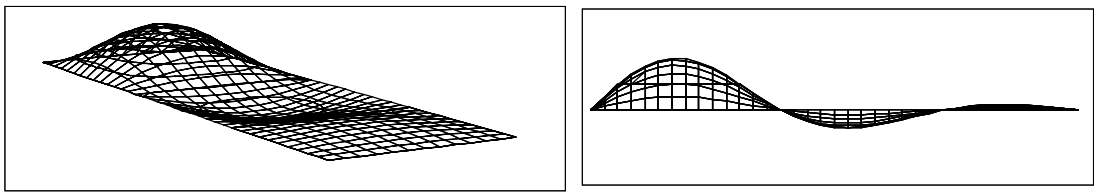
図 2(a)より 2 軸圧縮に短辺方向の曲げ応力が加わると、応力比の全ての範囲で座屈応力は低下する。これにせん断応力が加わった図 2(b)では、さらに座屈応力は低下する。座屈モードに着目すると、図 3(a)の短辺方向の圧縮が支配的な範囲では、座屈モードは非対称な 1 半波となり、座屈撓みが最大となる点は曲げ応力の圧縮側にシフトされる。次に、図 3(c)の長辺方向の圧縮が支配的な範囲では、座屈モードは不完全な 3 半波となった。このモードは、曲げ応力の圧縮側では座屈撓みが大きくなり、逆に引張り側では撓みが小さくなっている。これは、曲げの引張り応力により、座屈で問題となる圧縮応力がキャンセルされて、座屈撓みが生じにくくなったためと考えられる。



(a)1 半波の座屈モード



(b)2 半波の座屈モード



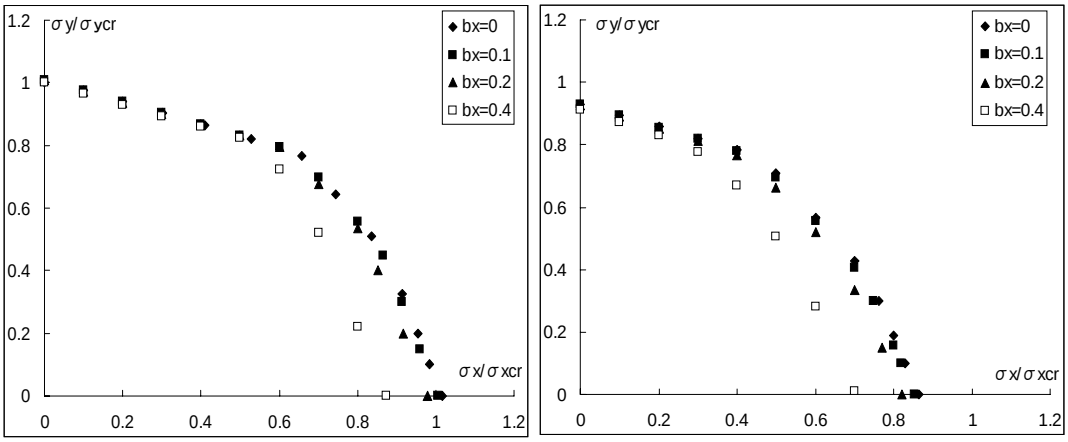
(c)3 半波の座屈モード

図 3　2 軸圧縮とせん断及び短辺方向の曲げ応力下における代表的な座屈モード

2.2 二軸圧縮とせん断及び長辺方向の曲げ応力下におけるパネルの座屈強度

アスペクト比 3 のパネルに対し、2 軸圧縮と長辺方向の曲げ応力の組み合わせ及びこれにせん断応力を加えた固有値解析の計算結果を図 4(a)、(b)に示す。図の縦軸、横軸は図 2 と同様で、長辺方向の曲げ座屈応力比(bx=σbx/σcrbx)を 0 から 0.4 まで考慮した。

図 4 より、2 軸圧縮に長辺方向の曲げ応力が加わると、短辺方向の圧縮が支配的な範囲では、座屈応力はほとんど下がらない。これは、曲げの圧縮応力が短辺方向の圧縮応力と直交するので、その影響をほとんど受けないためであると考える。長辺方向の圧縮が支配的な範囲では、曲げ座屈応力比がある程度大きくなると、座屈応力は低下する。これにせん断応力が加わると、全ての応力比の範囲で座屈応力はほぼ同程度に低下する。

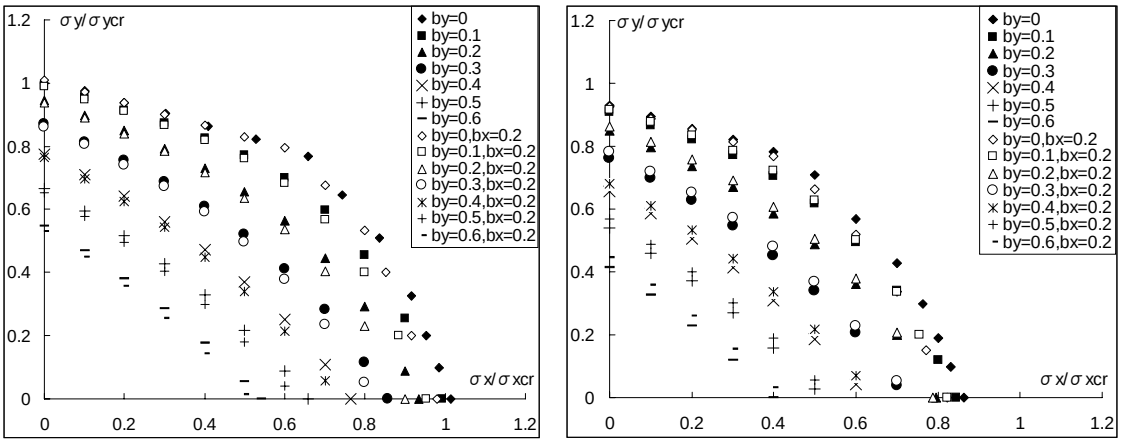


(a) τ / τ cr=0　　(b) τ / τ cr=0.4

図 4　2 軸圧縮とせん断及び長辺方向の曲げ応力下における FEM 固有値解

2.3 面内 5 成分応力下におけるパネルの座屈強度

アスペクト比 3 のパネルに対し、2 軸圧縮と長辺方向及び短辺方向の曲げ応力の組み合わせ及びこれにせん断応力を加えた固有値解析の計算結果を図 5(a)、(b)に示す。図の縦軸、横軸は図 2 と同様である。また、代表的な座屈モードを図 6(a)、(b)に示す。図 5(a)のせん断応力がゼロの場合、長辺及び短辺方向の曲げ成分(図の白抜き印)が加わると、座屈応力は全ての応力比の範囲で低下する。次に、図 5(b)のせん断応力が作用すると、長辺方向の曲げ座屈応力比が 0.2 の範囲までは、両曲げ応力成分を考慮した場合(図の白抜き印)の方が、座屈応力はむしろ上昇する。さらに座屈応力比が 0.4 まで上昇すると、短辺方向の圧縮が支配的な範囲では座屈応力は上昇するが、長辺方向の圧縮が支配的な範囲では低下する。これより、5 成分の面内応力の全てを考慮すると、4 成分まで考慮した場合と比べ、座屈応力がむしろ上昇する場合がある。座屈モードに着目すると、図 6(a)と図 6(b)を比較すると、撓みがゼロとなる座屈変形における節の線の傾斜が、両者で逆となっている。これにより、応力比によっては座屈応力がむしろ上昇する場合があるものと考える。



(a) τ / τ cr=0　　(b) τ / τ cr=0.4

図 5　2 軸圧縮とせん断及び長辺方向、短辺方向の曲げ応力下における FEM 固有値解

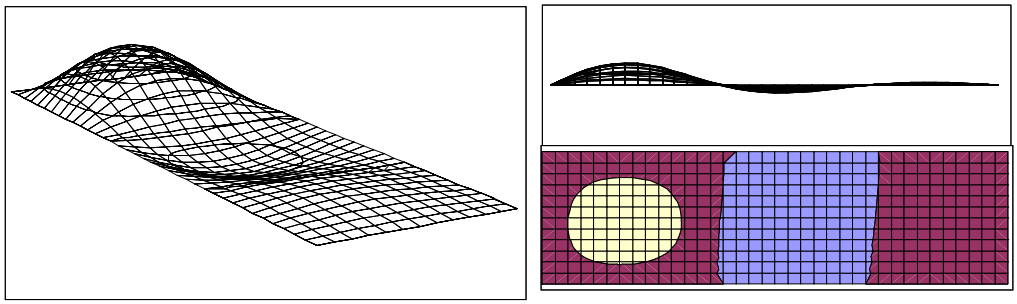


図 6(a)　2 軸圧縮と長辺方向及び短辺方向の曲げ応力下における座屈モード

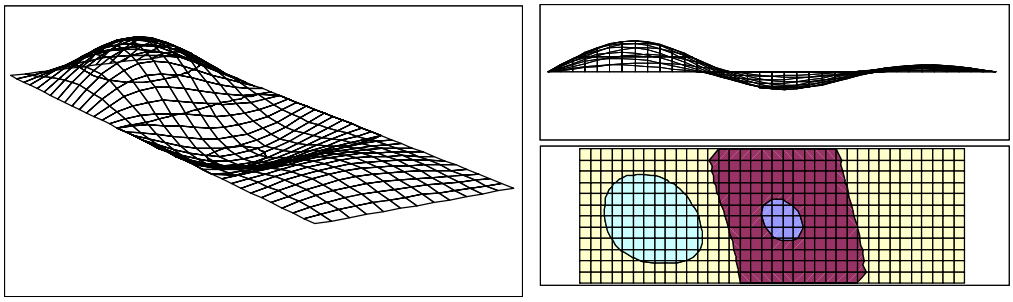


図 6(b)　2 軸圧縮とせん断及び長辺方向及び短辺方向の曲げ応力下における座屈モード

そこで、アスペクト比 3 のパネルに対して、2 軸圧縮と 2 軸曲げに加えてせん断応力が図 1 の向き及びこれと逆向きに作用する場合の固有値計算の比較を行った。図 7 で白抜きの印がせん断応力を図 1 の向きに作用させた場合である。横軸、縦軸は図 2 と同様である。せん断及び曲げ成分の座屈応力比は 0.2 とした。図より、図 1 と逆向きにせん断応力を作用させた場合の方が固有値は低下する。図 7 に長辺及び短辺方向の圧縮座屈応力比が等しい範囲での座屈モードを示す。座屈モード図より、図 1 と逆向きにせん断応力を作用させた場合には、せん断変形がさらに進展したモードとなっている。

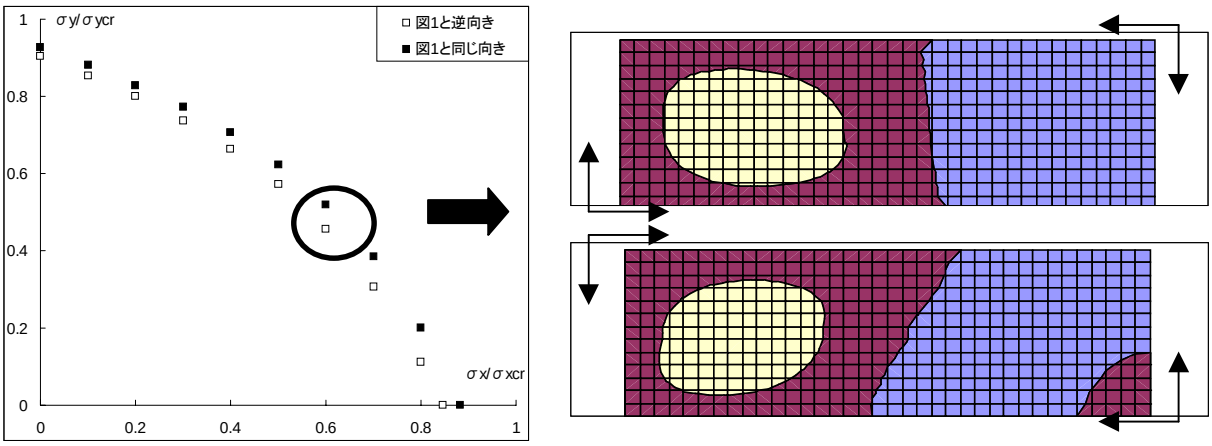


図 7　せん断応力の向きによる座屈応力の差異について

3.塑性修正法の検討

弾性座屈応力を求めた後に、塑性座屈が生じる場合に通常行われる塑性修正法による座屈評価について及び座屈強度評価の判定に用いる代表等価応力の設定について検討を行った。

3.1 塑性修正手法

塑性座屈応力は、適当な塑性修正式により塑性修正をして近似的に求めるのが一般的である。塑性修正式には、ジョンソンの修正式が広く用いられている。ここでは、ジョンソンの修正式により等価弾性座屈応力に対して塑性修正する手法(下記の式①)と、各弾性座屈応力成分毎に塑性修正して最後に等価塑性座屈応力を求める手法(下記の式②)の 2 通りについて考える。

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_{pcr} = \sigma_Y\left(1-\frac{\sigma_Y}{4\sigma_{ecr}}\right)、\ \sigma_{ecr} \geq \frac{\sigma_Y}{2} \\
&\sigma_{ecr} = \sqrt{(\sigma_{Bxcr}+\sigma_{Bbxcr})^2+(\sigma_{Bycr}+\sigma_{Bbycr})^2-(\sigma_{Bxcr}+\sigma_{Bbxcx})(\sigma_{Bycr}+\sigma_{Bbycr})+3\tau_{Bcr}{}^2}
\end{aligned}\right\} ①$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_{Pxcr} = \sigma_Y\left(1-\frac{\sigma_Y}{4\sigma_{Bxcr}}\right)、\ \sigma_{Pycr} = \sigma_Y\left(1-\frac{\sigma_Y}{4\sigma_{Bycr}}\right)、\ \tau_{Pcr} = \sigma_Y\left(1-\frac{\tau_Y}{4\tau_{Bcr}}\right) \\
&\sigma_{Pbxcr} = \sigma_Y\left(1-\frac{\sigma_Y}{4\sigma_{Bbxcr}}\right)、\ \sigma_{Pbycr} = \sigma_Y\left(1-\frac{\sigma_Y}{4\sigma_{Bbycr}}\right) \\
&\sigma_{pcr} = \sqrt{(\sigma_{Pxcr}+\sigma_{Pbxcr})^2+(\sigma_{Pycr}+\sigma_{Pbycr})^2-(\sigma_{Pxcr}+\sigma_{Pbxcr})(\sigma_{Pycr}+\sigma_{Pbycr})+3\tau_{Pcr}{}^2}
\end{aligned}\right\} ②$$

ここで、σ_{Bxcr}、σ_{Bycr}、σ_{Bbxcr}、σ_{Bbycr}、τ_{Bcr}：組み合わせ応力下における各成分の弾性座屈応力

σ_{Pxcr}、σ_{Pycr}、σ_{Pbxcr}、σ_{Pbycr}、τ_{Pcr}：組み合わせ応力下における各成分の塑性座屈応力

σ_Y：降伏応力、$\tau_Y = \sigma_Y/\sqrt{3}$、$\sigma_{ecr}$：等価弾性座屈応力、$\sigma_{pcr}$：等価塑性座屈応力

式①と②について、板厚 15mm と 25mm のアスペクト比 3 のパネルについて、2 軸圧縮及び長辺方向の圧縮とせん断の組み合わせについて、それぞれ塑性修正された値をプロットした結果を図 8(a)、(b)に示す。図で黒く塗りつぶした印が、式①での値である。座標軸は、それぞれの塑性座屈応力を降伏応力で割った値(σp/σY)である。代表等価応力はミーゼスの式を用いた。図 8 では、藤久保ら[1)]により開発された簡易算式による連続防撓パネルの最終強度の値も示している。

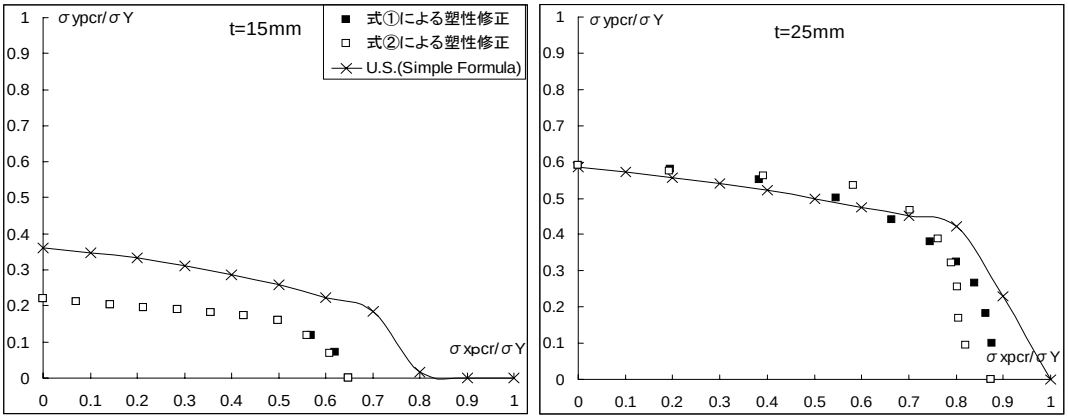


図 8(a)　2 軸圧縮応力下における塑性座屈応力及び最終強度

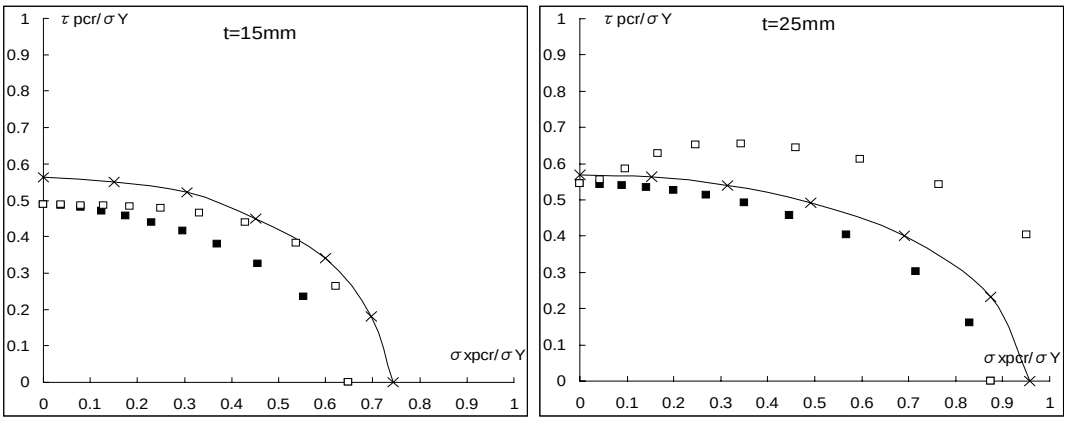


図 8(b)　長辺方向の圧縮とせん断応力下における塑性座屈応力及び最終強度

図 8 より 2 軸圧縮応力下では式①、②とも同等の評価結果を与える。最終強度との比較では、板厚が 15mm では安全側の評価を、25mm ではほぼ同程度の評価を与える。一方、長辺方向の圧縮とせん断応力の組み合わせでは、板厚 25mm の場合、式②での評価は FEM による最終強度に対して危険側の評価をとなる。これより、全般的には式①での評価の方が FEM による最終強度と良い相関を示すため、式①を用いたほうが適当であると考えられる。

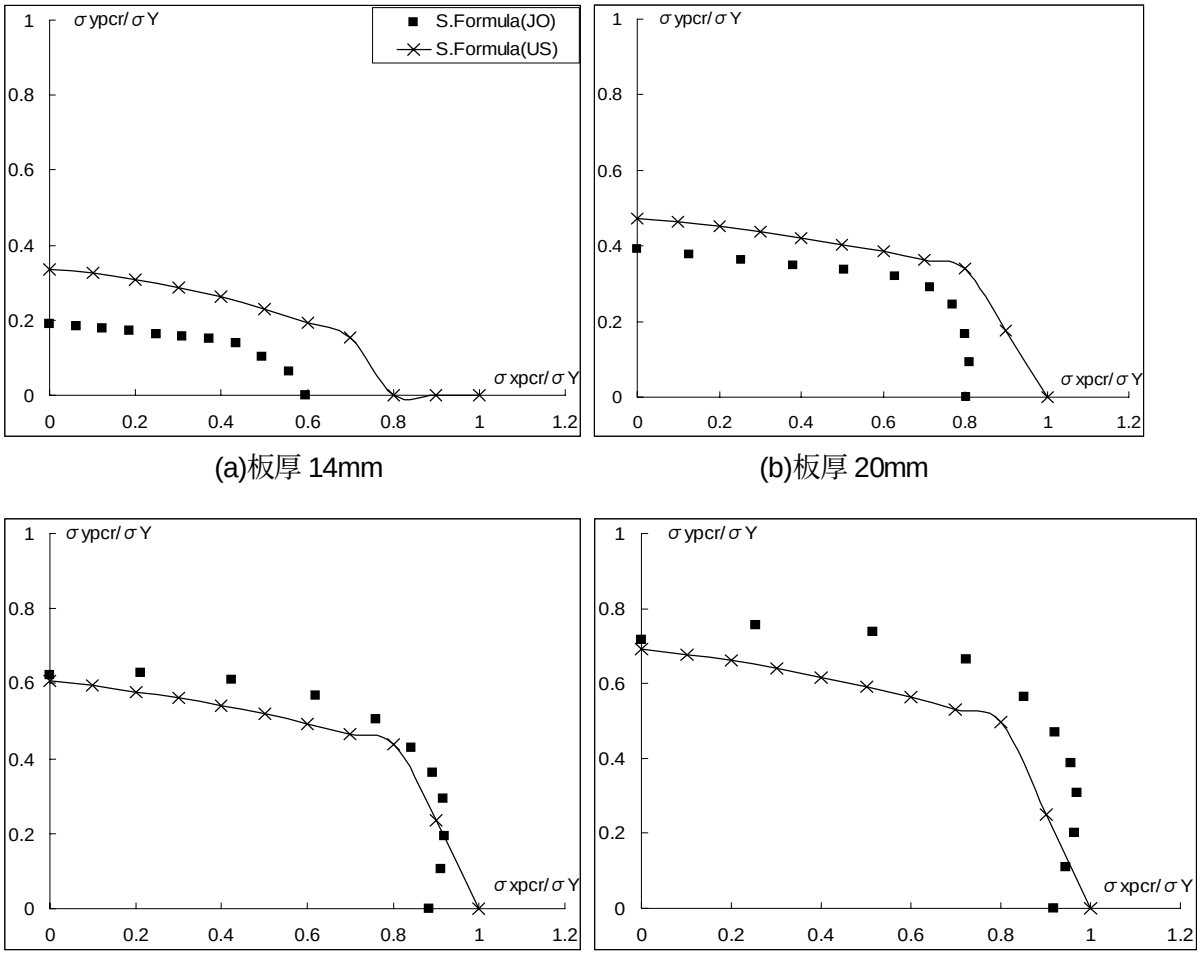
3.2 代表等価応力について

代表等価応力には、ミーゼスの等価応力が広く用いられている。ここで、塑性修正の物理的な意味について考える。塑性修正は、固有値としての塑性座屈応力の実用的な近似解を求めるために適用される。この値は、パネルの一部が最初に降伏する初期降伏強度よりは大きく、最終的な崩壊荷重を与える最終強度よりは小さい値となるのもと考えられる。

初期降伏強度　＜　塑性修正された値＜　最終強度

従って、塑性修正された値が最終強度より安全側となるように、また過大な安全側の評価とはならな

いように、ミーゼスの代表等価応力を適当に修正することを考える。アスペクト比 3 で板厚 14、20、26、30mm のパネルについて、2 軸圧縮下における式①で塑性修正された値と最終強度を比較した結果を図 9(a)から(d)に示す。図の座標軸は図 8 と同様で、黒印が塑性修正された値、曲線が最終強度を示す。図より薄板パネルについては、塑性修正された値は連続パネルの最終強度に対して安全側の評価となっている。一方、板厚が約 26mm を超えるような厚板パネルでは、最終強度に対して危険側の評価となる。



(a)板厚 14mm (b)板厚 20mm

(c)板厚 26mm (d)板厚 30mm

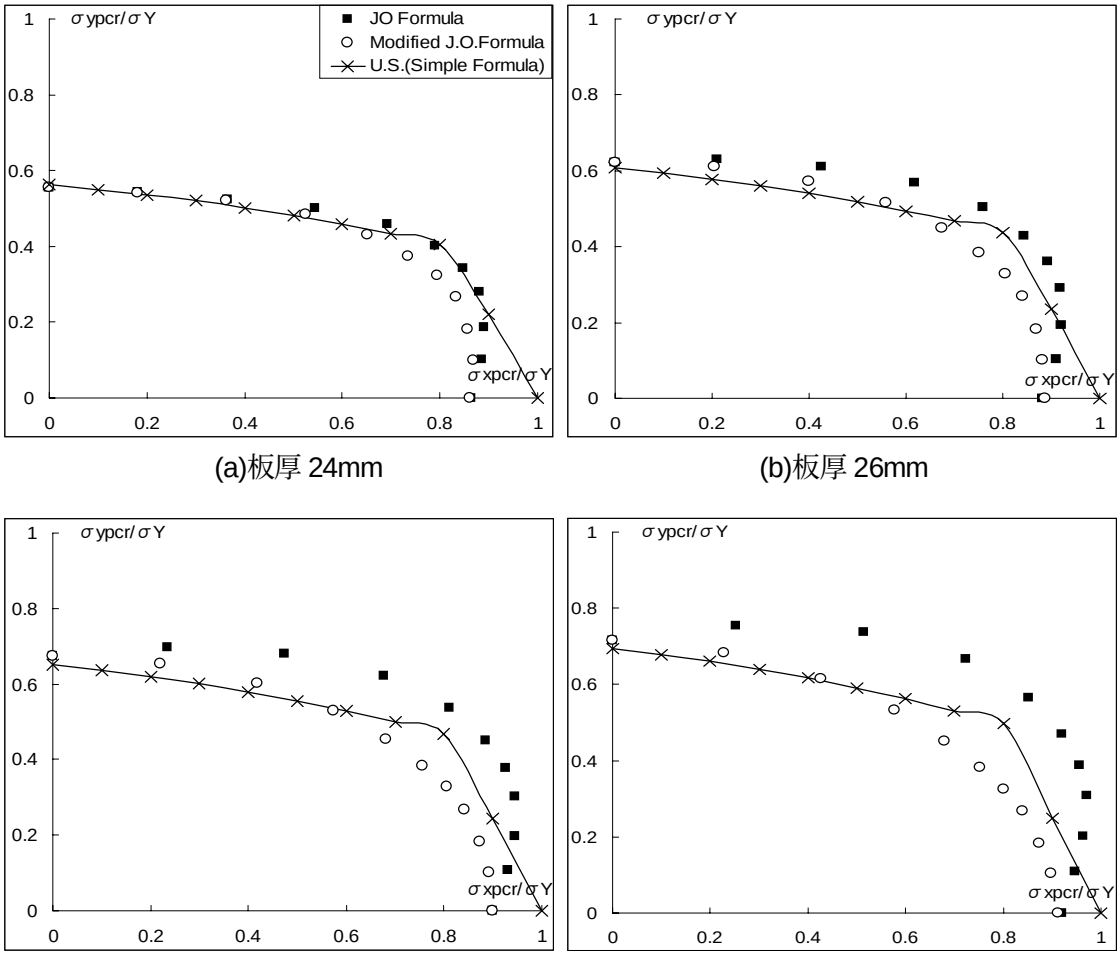
図 9　2 軸圧縮応力下における式①による塑性座屈応力と最終強度との比較

そこで、厚板のパネルでも塑性修正された値が最終強度より低くなるように、ミーゼスの等価応力を式③のように修正した。アスペクト比 3 で板厚 24、26、28、30mm のパネルについて、2 軸圧縮下における式③で塑性修正された値と最終強度を比較した結果を図 10 に示す。図で白抜きの丸印が式③で塑性修正された値である。図よりミーゼスの等価応力の相乗項を適当に修正することによって、厚板パネルであっても最終強度に対して安全側の評価に収めることができる。

$$\sigma_{ecr} = \sqrt{\sigma_{xcr}{}^2 + \sigma_{ycr}{}^2 - \alpha\sigma_{xcr}\sigma_{ycr}} \qquad \alpha = -0.1t + 3 \quad ③$$

t はパネルの板厚　　$where, \alpha \geq 1, \alpha = 1, and, \alpha \leq 0, \alpha = 0$

α はパネルのアスペクト比



(a)板厚 24mm　(b)板厚 26mm

(c)板厚 28mm　(d)板厚 30mm

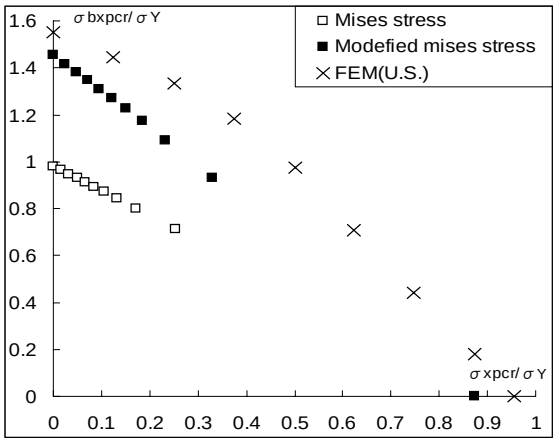
図 10　ミーゼスの等価応力を修正した式③による塑性座屈応力と最終強度との比較

次に、面内の曲げ応力成分の影響について考える。式①では曲げ応力成分を一様圧縮応力成分にそのまま加えているので、曲げ成分を過大に評価することになる。そこで、FEM によるパネルの最終強度解析を実施し、得られた結果と比較して最終強度より過大な安全側の評価とならないように曲げ成分の影響を評価する。FEM による最終強度解析は、周辺単純支持のアスペクト比 3 で板厚 15mm 及び 25mm のパネルについて、面内 5 応力成分の中で任意の 2 応力成分の組み合わせについて行った。パネルの初期撓みはその最大撓みを $w0=0.1\beta^2tp$ として、$\sin(\pi x/a)\sin(\pi y/b)$形状のものを与えた。($\beta$ は細長比で $\beta=b/tp\sqrt{\sigma Y/E}$)。

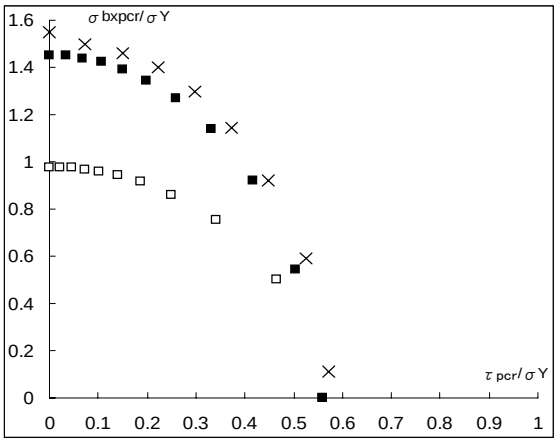
板厚 25mm のパネルについて、長辺方向の圧縮と長辺方向の曲げ、せん断と長辺方向の曲げ、短辺方向の圧縮と短辺方向の曲げ、せん断と短辺方向の曲げの組み合わせについて、FEM による最終強度と式①及び式④を用いて塑性修正された値とを比較した結果を図 11(a)、(b)、(c)、(d)に示す。また、参考までに図 11(c)及び(d)における最終強度時の崩壊モードを図 12(a)、(b)に示す。図で×印が最終強度、黒印が式④による値、白印が式①による値である。座標軸は図 7 と同様である。図より、式①のままでは、塑性修正された値は最終強度に対して過大に安全側となっている。一方で、式④のように曲げ応力成分にそれぞれ 2/3、3/4 の係数を乗じれば、最終強度に対して良い相関を示し、かつ適度な安全側の評価を与える。

$$\sigma_{ecr} = \sqrt{(\sigma_{xcr} + \frac{2}{3}\sigma_{bxcr})^2 + (\sigma_{ycr} + \frac{3}{4}\sigma_{bycr})^2 - \alpha(\sigma_{xcr} + \frac{2}{3}\sigma_{bcrx})(\sigma_{ycr} + \frac{3}{4}\sigma_{bycr}) + 3\tau_{cr}^{\ 2}} \quad ④$$

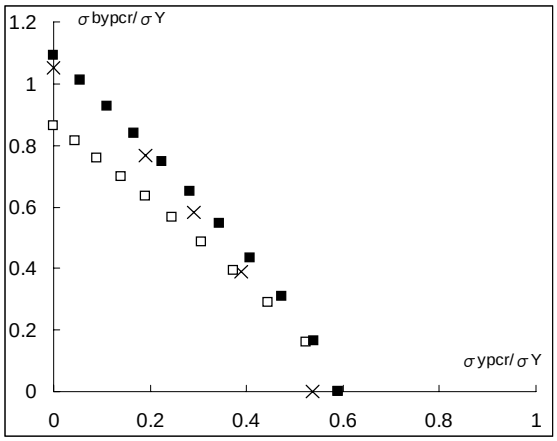
$$\alpha = -0.1t + 3 \ where, \alpha \geq 1, \alpha = 1, and, \alpha \leq 0, \alpha = 0$$



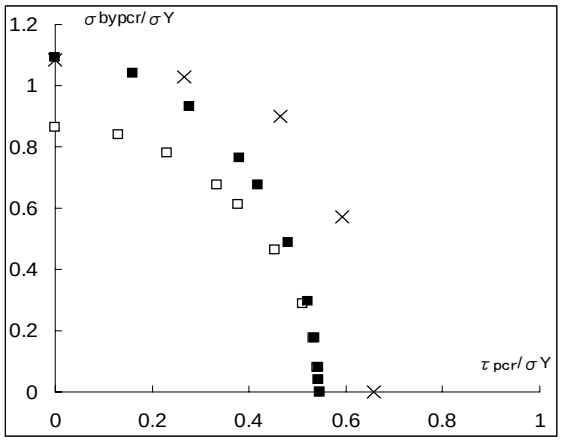
(a) 長辺方向の圧縮と長辺方向の曲げ応力



(b)せん断と長辺方向の曲げ応力

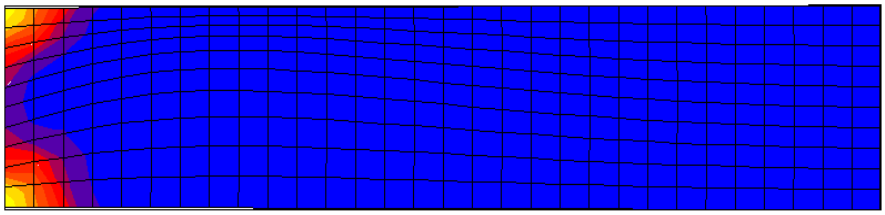


(c) 短辺方向の圧縮と短辺方向の曲げ応力

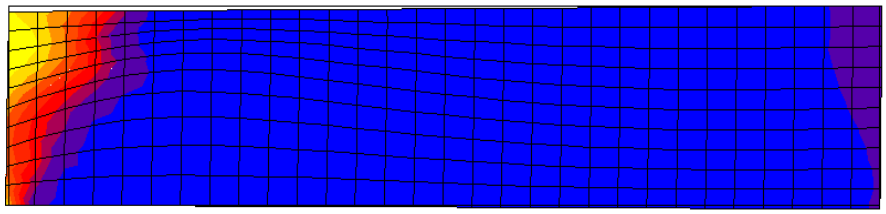


(d)せん断と短辺方向の曲げ応力

図 11　修正された代表等価応力式④による塑性座屈応力と最終強度との比較



(a) 短辺方向の圧縮と短辺方向の曲げ応力



(b) せん断と短辺方向の曲げ応力

図 12　最終強度時の崩壊モード図

(着色部は塑性歪の量を表す。明るい色ほど塑性歪が大で、黒色はゼロ。)

4.結論

座屈強度評価の実用化に関する研究の中から、面内5成分の組み合わせ応力下における固有値や座屈モードの特徴について考察した。また、塑性座屈に対して通常行われる塑性修正法について検討した。その結果、得られた結論として下記のものが挙げられる。

・組み合わせ応力下における曲げ成分の影響としては、短辺方向の曲げ応力成分は座屈強度に大きく影響を及ぼすが、長辺方向の曲げ応力成分はそれほど影響を及ぼさない。
・組み合わせ応力下において、せん断を除いた面内4成分の組み合わせまでは、曲げ成分の向きをどのように取っても固有値は同じである。これにせん断応力が加わると、せん断力の向きにより固有値が異なることがわかった。
・塑性修正法としてジョンソンの式で塑性修正する場合、各応力成分に対して塑性修正するよりは、代表等価応力に対して塑性修正した方が妥当であると考えられる。
・代表等価応力としてミーゼスの等価応力を用いると、2軸圧縮応力下における厚板のパネルでは、最終強度より危険側の評価を与える場合がある。ここで、ミーゼスの等価応力における相乗項を適当に修正すれば、最終強度に対して概ね安全側の評価となる。
・代表等価応力を算定する上で、曲げ応力成分をそのまま軸応力成分に加えると、最終強度に対して過大な安全側の評価を与える。ここで、修正係数を乗じて曲げ応力成分を適当に減じれば、最終強度に対して適度な安全側の評価となる。

参考文献

1) M. Fujikubo, T. Yao, Mohammad R. Khedmati,「Estimation of Ultimate Strength of Ship bottom Plating under Combined Biaxial Thrust and Lateral Pressure」,Transactions of the West-Japan Society of Naval Architects No.99 March 2000

付録

面内５成分の組み合わせ応力下における座屈相関式

$$k_1 k_2 x + k_3 k_4 y + k_5 k_6 z^d = 1 \qquad ①$$

$$k_7 k_8 x^{1.2} + k_9 k_{10} y^{1.4} + k_{11} k_{12} z^{1.7} = 1 \qquad (\sqrt{2} \le \alpha \le 10) \qquad ②$$

式①、②のうち小さいほうを座屈応力とする。

$$x = \frac{\sigma_{Bx}}{\kappa_x \eta_x \gamma_x \sigma_{xcr}}, \quad y = \frac{\sigma_{By}}{\kappa_y \eta_y \gamma_y \sigma_{ycr}}, \quad z = \frac{\tau_B}{\gamma_z \tau_{cr}}, \quad bx = \frac{\sigma_{Bbx}}{\sigma_{bxcr}}, \quad by = \frac{\sigma_{Bby}}{\sigma_{bycr}}$$

ここで、σ_{xcr} ：長辺方向の圧縮応力下における座屈応力
σ_{ycr} ：短辺方向の圧縮応力下における座屈応力
σ_{bxcr} ：長辺方向の面内曲げ応力下における座屈応力
σ_{bycr} ：短辺方向の面内曲げ応力下における座屈応力
τ_{cr} ：せん断応力下における下座屈応力
$k_1, k_3, k_5, k_7, k_9, k_{11}$ ：長辺方向の面内曲げ応力成分の影響係数
$k_2, k_4, k_6, k_8, k_{10}, k_{12}$ ：短辺方向の面内曲げ応力成分の影響係数
d ：せん断応力成分の影響係数
κ_x ：長辺方向の圧縮応力下における防撓材の影響係数(残留応力の影響を含む)
κ_y ：短辺方向の圧縮応力下における防撓材の影響係数(残留応力の影響を含む)
η_x ：長辺方向の圧縮応力下における水圧の影響係数
η_y ：短辺方向の圧縮応力下における水圧の影響係数
γ_x ：長辺方向の圧縮応力下における開孔の影響係数(スロットの影響を含む)
γ_y ：短辺方向の圧縮応力下における開孔の影響係数(スロットの影響を含む)
γ_z ：せん断応力下における開孔の影響係数(スロットの影響を含む)
α ：パネルのアスペクト比

各係数の詳細については、ここでは省略する。